OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE ASTRONOMIE ȘI ASTROFIZICĂ
ETAPA NAȚIONALĂ
TIMIȘOARA, 2025

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE - PROBA TEORETICĂ
CATEGORIILE S1 și S2

Subiectul I (25p)

A. (10p)

2p x 5

1. A
2. F
3. A
4. A
5. F

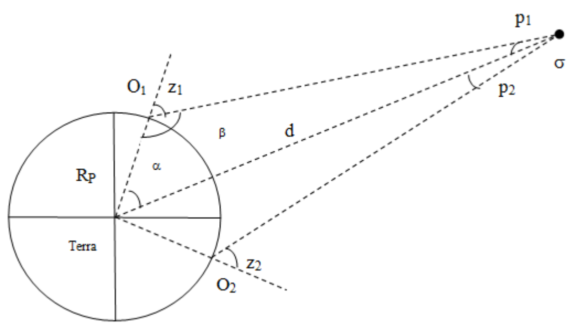
B. (15p)

3p x 5

1. b
2. d
3. a
4. b
5. b

Subiectul II (50p)

II. A. (10p)

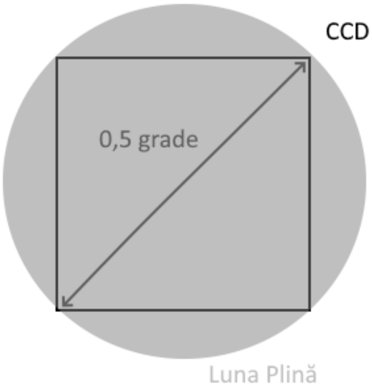
Suma unghiurilor interioare unui triunghi fiind 180^0, utilizând teorema sinusurilor și făcând aproximarea la unghiuri mici că sinusurile unghiurilor paralaxelor sunt egale cu unghiurile paralaxelor, obținem: 	1
$\alpha+\beta+p_1=180^0=\pi$; $\alpha+p_1=z_1$; $\sin(\pi-z_1)=\sin z_1$	2

$p_2 = \frac{R_P}{d}\sin z_2;$ $p = p_1 + p_2;$ $p = \frac{R_P}{d}(\sin z_1 + \sin z_2);$	2
$d = \frac{R_P}{p}(\sin z_1 + \sin z_2);$ $d = \frac{R_P}{p}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$	2
$\frac{\alpha}{180^0} = \frac{a}{\pi}; a = \frac{2\pi}{3600.180} = p;$	1
$d = \frac{6370000.324000}{3{,}14}(0{,}5 + 0{,}205);$ $d = 2{,}06388.10^{12}\frac{0{,}705}{3{,}14} \cong 4{,}621.10^{8}\,km;$	2

II. B. (10p)

Rezolvare	**Punctaj**
a) Fie $L = N_{px}d_{px}$ lățimea senzorului CCD, unde $N_{px} = 1080$ este numărul de pixeli pe un rând/coloană, iar d_{px} este dimeniunea unui pixel. Atunci, aria senzorului va fi $$A = L^2 = N_{px}^2 d_{px}^2$$ de unde $$d_{px} = \frac{\sqrt{A}}{N_{px}}$$ Numeric: $$d_{px} = \frac{\sqrt{116{,}64\ \mathrm{mm}^2}}{1080} = 10\ \mu m$$	2
Pentru a transforma în secunde de arc, împărțim la distanța focală a obiectivului $$\theta_{px} = \frac{d_{px}}{f_{ob}} = \frac{10\ \mu m}{20.000\ \mu m} = 103''$$	2
b) Calculăm aria totală a discului Lunii Pline, $$A_{LP} = \frac{\pi\theta_{LP}^2}{4} = 2544690\ arcsec^2$$	1
Aria unui singul pixel este $$A_{px} = \theta_{px}^2 = 10636.3\ arcsec^2$$	

<table>
<tr><td>De unde obținem
$$N_{LP} = \frac{\pi\theta_{LP}^2}{4\theta_{px}^2} = 240\ px$$</td><td>1

1</td></tr>
<tr><td>

c) Când Luna Plină acoperă toată imaginea avem îndeplinit scenariul schițat în desenul de mai sus.

Diagonala senzorului CCD va acoperi 1800 arcsecunde.

Deci noua dimensiune a unui pixel va fi
$$\theta_{px}^* = \frac{1800''}{1080\sqrt{2}} = 1{,}178''$$
de unde calculăm zoom-ul optic
$$zoom = \frac{\theta_{px}}{\theta_{px}^*} = \frac{103{,}13}{1{,}178} \approx 88$$</td><td>1

1

1</td></tr>
</table>

II. C. (10p)

<table>
<tr><th>Rezolvare</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td>a) Din relația masă – luminozitate, se obține $L = 1.1L_\odot$
Aplicăm legea Stefan – Boltzmann pentu a determina temperatura efectivă
$$L = 4\pi R^2\sigma T^4$$
Numeric: $T = 5634\ K$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>b) În timpul tranzitului, discul planetei va acoperi o arie de πr^2. Luminozitatea pe durata tranzitului va fi
$$L_{tr} = L\frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2}$$
De aici rezultă și diferența de magnitudine,
$$\Delta mag = -2.5\log\frac{L}{L_{tr}}$$
de unde
$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 - 10^{-0.4\Delta mag}}$$
Din grafic $\Delta mag \approx 0.011$
Numeric: $r = 1.2R_J$ (se acceptă eroare de $\pm 0.1R_J$)</td><td>2

1

1

1</td></tr>
<tr><td>c) Planeta și steaua orbitează în jurul centrului de masă comun,
$$r_1 + r_2 = d$$
$$r_1 M = r_2 M_P$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G(M + M_P)}} = 3{,}2\ zile$$
$$v = \frac{2\pi r_2}{T} = \frac{2\pi M_P d}{T(M + M_P)} = 84\ m/s$$
$$z = \frac{v}{c} = 2{,}9 \times 10^{-7}$$
Alternativ, se poate determina viteza din durata tranzitului estimată de pe grafic. Această soluție primește punctajul integral de asemenea.</td><td>1

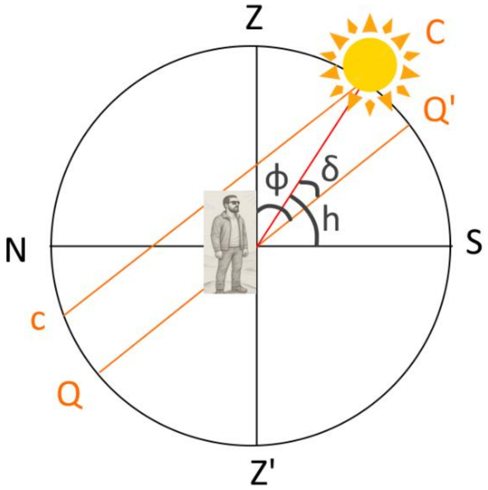
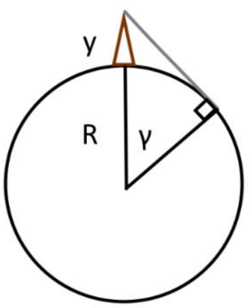
1

1</td></tr>
</table>

II. D. (10p)

Rezolvare	**Punctaj**
a) Raza se dublează, deci volumul crește de $2^3 = 8$ ori.	2
b) Pentru a observa un singur eveniment, putem să scriem: $$1 = rata \times \Delta t \times \Delta V$$ $$\Delta t = \frac{1}{rata \times \Delta V} = \frac{Gpc^3}{10 \times \frac{4 \times \pi}{3} \times 160^3 Mpc^3}\, ani$$	2
$$\Delta t = \frac{(1000Mpc)^3}{10 \times \frac{4 \times \pi}{3} \times 160^3 Mpc^3}\, ani = \frac{3 \times 10^8}{4\pi \times 160^3}\, ani$$ $$= 5{,}8\, ani$$	2
c) Egalăm energia emisă de coliziune în unde gravitaționale cu energia emisă de Soare într-un interval de timp Δt: $$0{,}025 M_\odot c^2 = L_\odot \times \Delta t$$	2
$$\Delta t = \frac{0{,}025 M_\odot c^2}{L_\odot} = \frac{0{,}025 \times 2 \times 10^{30} \times 9 \times 10^{16}}{3{,}83 \times 10^{26}}\, s$$ $$= 1{,}175 \times 10^{19} s$$ în ani, $$\Delta t = \frac{1{,}175 \times 10^{19}}{60 \times 60 \times 24 \times 365{,}2422}\, ani = 3{,}7 \times 10^{11}\, ani$$	2

II.E. (10p)

Rezolvare	**Punctaj**
	
a) Ion observă că umbra sa are aceeași lungime cu înălțimea sa. Asta înseamnă că înălțimea Soarelui față de orizont este $h = 45^o$ Dacă Soarele se află spre punctul cardinal Sud, atunci acesta se află pe meridian la culminație superioară (cum este reprezentat în figura de mai sus). Atunci, $\phi + h - \delta_\odot = \frac{\pi}{2}$ De unde aflăm declinația Soarelui, $\delta_\odot = \phi + h - \frac{\pi}{2}$ $\delta_\odot = 45^o + 45^o - 90^o$ $\delta_\odot = 0$ deci Soarele se află la echinocțiul de primăvară sau toamnă, ceea ce înseamnă ca Ion nu este îmbrăcat nici foarte gros, dar nici foarte subțire, adică varianta C.	1 1 1
 b) Coborârea orizontului pentru $y = 314m$: $\gamma \approx \sin\gamma = \frac{\sqrt{(R+y)^2-R^2}}{R+y}$ $\gamma \approx \frac{\sqrt{2Ry}}{R+y}$ $\gamma = 0{,}4023^o$ Raza unghiulară a discului solar:	1

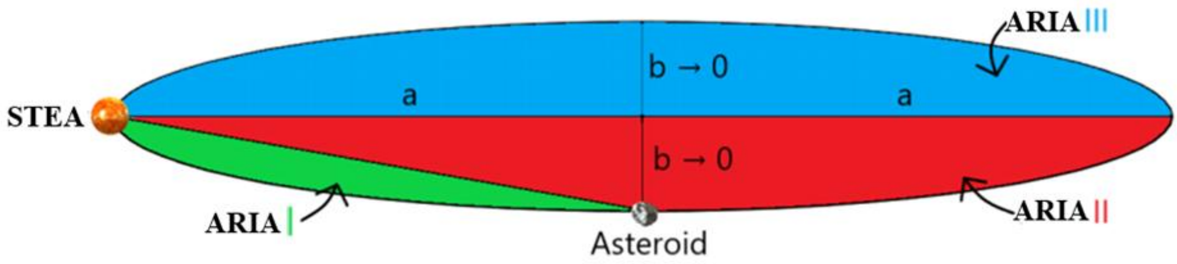
$\theta_{\odot} = \frac{R_{\odot}}{1\ UA}$ $\theta_{\odot} = 0{,}2669^{o}$	1
Soarele va apune complet când înălțimea Soarelui va fi $h_{\odot} = -\gamma - \theta_{\odot}$ Din următoarea bine-cunoscută relație obținem unghiul orar al Soarelui la acel moment, $\sin h = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos \mathrm{H}_{\odot}$	1
$\cos \mathrm{H}_{\odot} = -\frac{\sin(\gamma + \theta_{\odot}) + \sin\phi \sin\delta}{\cos\phi \cos\delta}$ $\cos \mathrm{H}_{\odot} = -\frac{\sin(0{,}6692^{o}) + \sin 45^{o} \sin 0}{\cos 45^{o} \cos 0}$ $H_{\odot} = 6.063094\ h$	1
Timpul local se determină astfel: $TL = 12h + H_{\odot} - L + n$ $TL = 18h23m47s$	1
Noua coborâre a orizontului pentru $y' = 554m$: $\gamma' \approx \frac{\sqrt{2Ry'}}{R + y'} = 0{,}5343^{o}$	1
de unde $\cos \mathrm{H}_{\odot} = -\frac{\sin(0{,}8012^{o}) + \sin 45^{o} \sin 0}{\cos 45^{o} \cos 0}$ $H_{\odot} = 6.075545\ h$ $TL = 18h24m32s$ $\Delta t = 45s$	1
<u>Soluție alternativă</u> Neglijăm variația declinației în timp și diferențiăm ecuația anterioară în raport cu timpul,	1
$\cos h(t) \frac{\Delta h}{\Delta t} = -\cos\phi \cos\delta \sin \mathrm{H}_{\odot}(t) \frac{\Delta H_{\odot}}{\Delta t}$ În jurul apusul avem însă	1

$$\sin H_{\odot}(t) \approx 1$$	1
$$\cos h(t) \approx 1$$	1
$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\cos\phi\cos\delta\frac{\Delta H_{\odot}}{\Delta t}$$ $$\frac{\Delta H_{\odot}}{\Delta t} \approx \omega_{\oplus}$$ unde $\omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{T_{sol}}$	1
$$\Delta h = \gamma - \gamma' \approx \frac{\sqrt{2Ry} - \sqrt{2Ry'}}{R}$$ $$\Delta t = \frac{\gamma - \gamma'}{\cos\phi\cos\delta\,\omega_{\oplus}}$$ $$\Delta t = \frac{T_{sol}(\gamma - \gamma')}{2\pi\cos\phi\cos\delta}$$ *Obs. Relația anterioară se poate deduce și geometric cu sau fără a ține cont de declinație.*	1
Numeric: $$\Delta t = \frac{0{,}132^{o} \times 24\text{h}}{2\pi\cos 45^{o}\cos 0^{o}}$$ $$\Delta t = 45\text{s}$$	1

Subiectul III (75p)

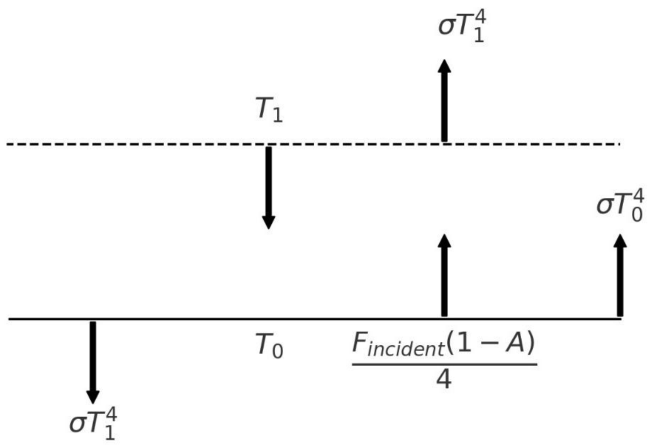
III. A1 (20 puncte)	
a) **(5p)** Aplicând formula efectului Doppler clasic $\frac{V_{radial}}{c}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$, pentru viteze mici	1p
$\frac{V_A}{c}=\frac{\lambda_A-\lambda_0}{\lambda_0}=\frac{656{,}10-656{,}28}{656{,}28}$, $V_A=-82{,}28Km/s$, steaua A se apropie de observator	2p
$\frac{V_B}{c}=\frac{\lambda_B-\lambda_0}{\lambda_0}=\frac{656{,}50-656{,}28}{656{,}28}$, $V_B=100{,}57Km/s$, steaua B se depărtează de observator	2p
b) **(5p)** Pentru sistemul binar aplicăm relația $m_A\cdot a_A=m_B\cdot a_B$,	0,5p
$\alpha_B=\frac{a_B}{d}$,	0,5p
$a_B(UA)=\alpha''_B\cdot d(pc)=1{,}67\cdot10^{-3}\cdot24{,}88=0{,}0415UA=6208400\ Km$	0,5p
$a_A=\frac{m_B\cdot a_B}{m_A}=\frac{0{,}042UA}{1{,}026}=0{,}0409UA=6118640Km$	0,5p
Aplicăm legea a III-a lui Kepler obținem următoarea relație pentru sistemul binar $\frac{P^2\cdot(m_A+m_B)}{(a_A+a_B)^3}=1$ unde P = 3,96 zile = 0,010842 ani	1,5p
$m_A+m_B=\frac{(0{,}0415+0{,}0409)^3}{0{,}010842^2}=\frac{0{,}0824^3}{1{,}1755\cdot10^{-4}}M_\Theta=\frac{5{,}595\cdot10^{-4}}{1{,}166\cdot10^{-4}}M_\Theta=4{,}80M_\Theta$ mase solare	1p
$m_B=2{,}37M_\Theta$ iar $m_A=2{,}43M_\Theta$	0,5p
c) (5p) Din datele problemei știm că stelele sunt în secvența principală deci aplicăm relațiile: $\frac{L_A}{L_\Theta}=\left(\frac{m_A}{m_\Theta}\right)^{3{,}8}$; $\frac{L_B}{L_\Theta}=\left(\frac{m_B}{m_\Theta}\right)^{3{,}8}$	1p
$L_A=29{,}19L_\Theta$ $L_B=26{,}54L_\Theta$	1p
$\frac{L_A}{L_\Theta}=10^{-0{,}4(M_A-M_\Theta)}$; $\frac{L_B}{L_\Theta}=10^{-0{,}4(M_B-M_\Theta)}$	2p
M_A = +1,17mag, M_B = +1,23mag,	1p

d) (5p) $M_A = m'_A + 5 - 5\log d$ $\quad M_B = m'_B + 5 - 5\log d$	0,5p
magnitudinile aparente $m'_A = +3{,}15 mag$ și $m'_B = +3{,}21 mag$	0,5p
magnitudinea minima a sistemului se obține din $10^{-0,4m'_{sist}} = 10^{-0,4m'_A} + 10^{-0,4m'_B}$	0,5p
$m'_{sist(\min)} = +2{,}42 mag$	0,5p
calculăm razele celor două componente $\frac{L_A}{L_\Theta} = \frac{4\pi R_A^2 \sigma T_A^4}{4\pi R_\Theta^2 \sigma T_\Theta^4}$ și $\frac{L_B}{L_\Theta} = \frac{4\pi R_B^2 \sigma T_B^4}{4\pi R_\Theta^2 \sigma T_\Theta^4}$	0,5p
$R_A = R_\Theta \cdot \left(\frac{T_\Theta}{T_A}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{L_A}{L_\Theta}}$ și $R_B = R_\Theta \cdot \left(\frac{T_\Theta}{T_B}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{L_B}{L_\Theta}}$	0,5p
$R_A = 2{,}06 R_\Theta$ $\quad R_B = 2{,}03 R_\Theta$	0,5p
Planul orbitelor celor două stele fiind în același plan cu linia de vedere atunci sistemul binar este cu eclipsă. Atunci când steaua B se află central în fața stelei A se poate scrie relația $\frac{R_B^2 T_B^4 + (R_A^2 - R_B^2)\cdot T_A^4}{R_\Theta^2 T_\Theta^4} = 10^{-0,4(M'_{\max} - M_\Theta)}$	0,5p
de unde rezultă magnitudinea absolută a sistemului în această situație $M'_{sist} = +1{,}20$	0,5p
iar magnitudinea aparentă maximă sistemului fi dată de relația $M'_{sist(\max)} = m'_{sist(\max)} + 5 - 5\log d$ $m'_{sist(\max)} = +3{,}18 mag$	0,5p

III.A2 (15 puncte)	
a) (10p)	
	2p
$$E=\frac{m\cdot V^2}{2}-\frac{G\cdot M\cdot m}{d}=-\frac{GMm}{2a}$$	1p
$$\frac{GMm}{2d}-\frac{G\cdot M\cdot m}{d}=-\frac{GMm}{2a}$$	1p
$$\frac{1}{2d}=\frac{1}{2a}$$ deci **d=a**	1p
Utilizăm legea a III-a lui Kepler: $$\frac{T^2}{d^3}=\frac{4\pi^2}{GM} \quad \text{deci} \quad T=2\pi d\sqrt{\frac{d}{GM}}$$	2p
Dacă asteroidul se deplasează inițial către stea, mătură zona I pentru a ajunge la stea. Folosind cea de-a doua lege a lui Kepler, este posibil să se calculeze cât timp durează aceasta deplasare. $$\frac{\Delta t}{T}=\frac{A_I}{A_{Total}}=\frac{\frac{\pi ab}{4}-\frac{ab}{2}}{\pi ab}$$	2p
$$\Delta t=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\right)\cdot T \quad \text{deci} \quad \Delta t=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot d\cdot\sqrt{\frac{d}{GM}}$$	1p
b) (5p)	
Dacă asteroidul se îndepărtează inițial de stea, mătură zonele II și III înainte de a ajunge la stea.	

Utilizăm legea a III-a lui Kepler: $\frac{\Delta t}{T} = \frac{A_{II} + A_{III}}{A_{Total}} = \frac{\frac{\pi ab}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{\pi ab}{2}}{\pi ab}$	1p
$\Delta t = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\right) \cdot T$	2p
$\Delta t = \left(\frac{3\pi}{2} + 1\right) \cdot d \cdot \sqrt{\frac{d}{GM}}$	2p

III. B. Temperatura Pământului (15p)



a) Fluxul mediu primit de Pământ este (valoare numerică nu trebuie calculate neapărat): $F_{incident} = \frac{L_\odot}{4\pi r^2} = 1367\ \frac{W}{m^2}$	1
$A = \frac{F_{reflectat}}{F_{incident}} \rightarrow F_{absorbit} = (1-A)F_{incident}$	1
Energia în timp absorbită de pământ: $E_{absorbit} = F_{absorbit} \cdot \pi R_p^2$	1
Fluxul mediu pe sistemul Pământ-atmosferă: $\frac{E_{absorbit}}{4\pi R_p^2} = \frac{F_{absorbit}(1-f)}{4} = (1-A)\frac{F_{incident}}{4}$	1

Echilibrul de radiație al sistemului Pământ - atmosferă: $\frac{F_{incident}}{4}(1-A) = \sigma T_1^4 + (1-f)\sigma T_0^4$ Partea stângă a ecuației este radiația absorbita de sistemul Pământ-atmosferă, pe când partea dreaptă este radiația emisă.	2
Echilibrul de radiație pentru atmosferă: $f\sigma T_0^4 = 2\sigma T_1^4$ Se oferă punctaj parțial (3p) pentru ecuația corectă fără factorul 2 din radiația emisă de atmosferă. $$fT_0^4 = 2T_1^4 \to T_0 = \sqrt[4]{\frac{2}{f}}T_1$$ $$\frac{F_{incident}}{4}(1-A) = \sigma T_0^4\left(\frac{f}{2}+1-f\right) = \sigma T_0^4\frac{2-f}{2}$$ $$T_0^4 = \frac{F_{incident}(1-A)}{2\sigma(2-f)}$$ $$T_0 = \sqrt[4]{\frac{F_{incident}(1-A)}{2\sigma(2-f)}} = 287K$$ $$= 14℃$$ $$T_1 = \sqrt[4]{\frac{F_{incident}(1-A)}{4\sigma(2-f)}} = 241K$$ $$= -32℃$$ Se oferă câte 2p pentru ecuații corecte ale T_0, T_1 și câte 1p pentru valorile corecte in grade Celsius. Nu se acordă puncta pentru valorile in grade Kelvin.	3 1 0,5 1 0,5
b) În cazul ignorării atmosferei ($f = 0$) Noul flux mediu pe Pământ: $$\frac{E_{absorbit}}{2\pi R_p^2} = \frac{F_{absorbit}}{2} = (1-A)\frac{F_{incident}}{2}$$ Echilibrul de radiație: $\frac{F_{incident}}{2}(1-A) = \sigma T_0^4$ $$T_0 = \sqrt[4]{\frac{F_{incident}(1-A)}{2\sigma}} = 302K = 29℃$$	1 1 1

III. C. Lărgimea secvenței principale (25p)

Rezolvare	**Punctaj**
a. Fie ΔV un volum din plasmă. În acest volum se găsește o masă $\Delta m = \rho \Delta V$ de gaz. Din moment ce X_j este fracția masică a elementului chimic j, masa $\Delta m_j = X_j \Delta m$ din elementul chimic j se va regăsi în acest volum.	2
Întrucât elementul j are numărul atomic de masă A_j, masa unui nucleu va fi $A_j m_{proton} \approx A_j m_H$, iar numărul de ioni (nuclee fără electroni) din specia atomică j din unitatea de volum va fi $$n_j = \frac{\Delta m_j/(A_j m_H)}{\Delta V}.$$	2
Așadar, obținem $$n_j = \frac{X_j \rho}{A_j m_H}.$$	1
b. Masa moleculară medie este definită de relația $P = \frac{\rho k_B T}{M m_H}$. Conform indicațiilor din enunț, modelăm comportamentului gazului complet ionizat cu ecuația de stare a gazului ideal, $P = n k_B T$, unde n este numărul total de particule din unitatea de volum. Așadar, masa moleculară medie este dată de $$M^{-1} = \frac{m_H n}{\rho}.$$	1
Rămâne de calculat n, numărul total de particule din unitatea de volum. Acest număr include atât nucleele rămase în urma ionizării complete, cât și electronii liberi rezultați. Conform rezultatului de la punctul **a**, numărul de nuclee (ioni) ai speciei j din unitatea de volum este dată de $$n_j = \frac{X_j \rho}{A_j m_H}.$$ Considerând că fiecărui nucleu îi corespund z_j electroni liberi (acest număr este egal cu sarcina nucleului deoarece modelul considerat este cel al ionizării totale a gazului), numărul de electroni liberi în	3

unitatea de volum care provin de la specia atomică j este $$n_{e,j} = z_j n_j = \frac{z_j X_j \rho}{A_j m_H}.$$ Așadar, numărul total de particule din unitatea de volum este $$n = \sum_j (n_{e,j} + n_j) = \sum_j \frac{(1+z_j)X_j\rho}{A_j m_H}.$$ **Mențiuni:** • Pentru o rezolvare care nu ia în considerare decât numărul n_j corespunzător contribuției ionilor (nu este luat în calcul numărul $n_{e,j}$ al electronilor din unitatea de volum), se vor acorda **25% din puncatj**. • Pentru o rezolvare care nu ia în considerare decât numărul $n_{e,j}$ corespunzător contribuției electronilor (nu este luat în calcul numărul n_j al ionilor din unitatea de volum), aceasta fiind contribuția principală în cazul majorității speciilor atomice, se vor acorda **75% din punctaj**.	
Masa moleculară medie este dată de expresia $$M = \left(\frac{m_H}{\rho}\sum_j \frac{(1+z_j)X_j\rho}{A_j m_H}\right)^{-1} = \left(\sum_j \frac{(1+z_j)X_j}{A_j}.\right)^{-1}$$	2
c. Folosind rezultatul de la punctul **b**, masa moleculară medie a plasmei este dată de $$M^{-1} = \frac{(1+z_H)X}{A_H} + \frac{(1+z_{He})Y}{A_{He}} + \sum_j \frac{(1+z_j)Z_j}{A_j},$$ unde: • $z_H = 1$ și $A_H = 1$ în cazul Hidrogenului • $z_{He} = 2$ și $A_{He} = 4$ în cazul Heliului • Z_j este fracția masică a „metalului” indexat cu litera j, A_j este numărul atomic de masă corespunzător, iar z_j este sarcina (numărul de protoni al) nucleului.	2
Din moment ce prin „metal” ne referim la orice alt element chimic în afară de Hidrogen și Heliu, este valabilă relația $X + Y + Z = 1$, de unde rezultă că $$\sum_j Z_j = 1 - X - Y.$$	1

Din moment ce numărul Z descrie fracția masică a tuturor elementelor în afară de Hidrogen și Heliu, putem face aproximația $z_j \approx A_j$, corespunzătoare presupunerii că numărul de protoni și numărul de neutroni sunt, în medie, comparabili pentru elementele chimice în afară de Hidrogen și Heliu care pot alcătui interiorul unei stele. Din moment ce numărul atomic de masă este de ordinul zecilor, $1/A_j$ este neglijabil față de $\frac{z_j}{A_j} \approx \frac{1}{2}$. Așadar, $\frac{(1+z_j)}{A_j} \approx \frac{1}{2}$.	1
Se obține expresia aproximativă a masei moleculare: $$M^{-1} \approx \frac{(1+1)X}{1} + \frac{(1+2)Y}{4} + \sum_j \frac{1}{2} Z_j = 2X + \frac{3Y}{4} + \frac{1-X-Y}{2}$$ $$M \approx \left(\frac{3X}{2} + \frac{Y}{4} + \frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3X + \frac{Y}{2} + 1}.$$	2
d. **Mențiune:** pentru acest subpunct, se va acorda un punctaj parțial corespunzător pentru ideile prezentate corect și coerent, chiar dacă nu conduc la o rezolvare completă. *Pentru stelele aflate pe secvența principală, cum evoluează masa moleculară medie a plasmei în timp?* Secvența principală cuprinde stele de masă medie aflate în faza de fuziune a Hidrogenului în Heliu. Așadar, fracția masică X a Hidrogenului scade, pe când fracția masică Y a Heliului crește. De asemenea, masa Hidrogenului este aproape în totalitate convertită în Heliu (doar 0,7% din energia Hidrogenului este convertită în fotoni). Așadar, într-un proces scurt în care fracția masică a Hidrogenului scade de la X la $X - \delta$ (cu $0 < \delta \ll X$), putem estima că fracția masică a Heliului crește cu aproximativ aceeași valoare, de la Y la $Y + \delta$. Așadar, masa moleculară medie a plasmei devine $$M \approx \frac{2}{\left(3X + \frac{Y}{2} + 1\right) - \frac{5\delta}{2}}.$$ Putem conchide că masa moleculară medie a plasmei *crește* în timp.	3
Cum tinde să evolueze presiunea gazului ionizat și ce consecință fizică are această evoluție asupra nucleului stelei? Din expresia definitorie a masei moleculare medii, $P = \frac{\rho k_B T}{M m_H}$, observăm că, într-un proces foarte scurt, dacă ceilalți parametri (ρ și T) variază lent în raport cu masa moleculară medie, presiunea plasmei va tinde să *scadă* în timp, deoarece M *crește*. Așadar, o nouă stare intermediară de echilibru hidrostatic se va realiza, deoarece asupra unui strat de fluid din preajma nucleului stelei acționează și forța de atracție gravitațională, care va tinde să comprime nucleul,	2

întrucât forța care se opune, datorată presiunii plasmei și a presiunii radiației, scade. Așadar, nucleul stelei *se micșorează* în timp.	
În final, explică de ce compoziția chimică a stelelor determină lărgimea nenulă a secvenței principale pe diagrama Hertzsprung-Russell. În primul rând, observăm că presiunea plasmei din nucleu (și implicit dimensiunea nucleului, din cauza echilibrului hidrostatic) este influențată de masa moleculară medie, care depinde de compoziția chimică a stelei. Vom analiza întâi evoluția unei singure stele în timp. Conform răspunsului de la întrebarea precedentă, nucleul stelei *se micșorează* în timp. În noile stări intermediare de echilibru hidrostatic, ceilalți parametri (ρ și T) își vor ajusta lent valorile. Din moment ce nucleul stelei se micșorează în timp, densitatea ρ a gazului ionizat va crește. Când mediul devine mai dens, reacțiile termonucleare de fuziune ale Hidrogenului în Heliu se intensifică. În consecință, rata de emisie a fotonilor obținuți din reacțiile de fuziune crește, ceea ce duce (în timp) la o creștere a luminozității stelei. În concluzie, deși masa stelei (care este factorul principal care determină poziția stelei pe diagrama H.-R.) nu se modifică semnificativ, luminozitatea va varia (crește) în timp. În mod similar, două stele de masă identică dar cu compoziții chimice diferite vor avea nuclee de dimensiuni diferite, deci o rată diferită de producere a reacțiilor de fuziune. Așadar, ele vor avea aceeași masă, dar luminozități ușor diferite. Pozițiile celor două stele pe diagrama HR vor fi astfel apropiate, însă nu identice. Acest raționament explică (măcar parțial) lărgimea nenulă a secvenței principale pe diagrama HR.	3